7. Variables aléatoires continues et théorèmes asymptotiques

Exercice 7.1 Dans un aérodrome, la durée du processus d'atterrissage d'un avion, mesuré en minutes, est une variable aléatoire T dont la densité de probabilité est $f(t) = te^{-t}$ pour $t \geq 0$ et 0 sinon.

i) Vérifier que f est bien une densité de probabilité..

ii) Déterminer les probabilités des événements : $(T > 2)$; $(1 < T < 3)$; $(1 < T < 3)$ sachant que $(T < 4)$.

Démonstration. (i) Pour qu'une fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ soit la densité d'une v.a. il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies : (a) g est continue sur $\mathbf{R}$ sauf en un nombre fini de points ; (b) $g(x) \geq 0$ quelque soit $x \in \mathbf{R}$ où f est continue ; (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1$. La fonction f satisfait clairement aux deux premières conditions. Pour la dernière condition, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 0 + 1 = 1.$$

D'où le fait que f est bien une densité de probablité.

(2) Par l'hypothèse, si $0 \leq a \leq b$, on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_a^b + \int_a^b e^{-x}dx = [-xe^{-x}]_a^b - [e^{-x}]_a^b.$$

Par suite, on a $P(T > 2) = \int_2^{+\infty} xe^{-x}dx = 3e^{-2} \approx 0,406$, $P(1 < T < 3) = \int_1^3 xe^{-x}dx = 2e^{-1} - 4e^{-3} \approx 0,53$. Enfin, $P(T < 4) = \int_{-\infty}^4 f(x)dx = \int_0^4 xe^{-x}dx = 1 - 5e^{-4} \approx 0,908$. D'où

$$P_{(T<4)}(1 < T < 3) = \frac{P(1 < T < 3, \text{ et } T < 4)}{P(T < 4)} = \frac{P(1 < X < 3)}{P(T < 4)} \approx 0,58.$$

□

Exercice 7.2 Exprimée en heures, la duré de vie D d'un certain modèle d'ampoule électrique est une variable aléatoire de densité f donnée par $f(x) = \frac{c}{x^2}$ si $x > 200$, et $= 0$ sinon.

i) Calculer c.

ii) On contrôle l'état d'une ampoule après 300 heures d'utilisation. Avec qu'elle probabilité est-elle hors d'usage ?

iii) On équipe un local souterrain de 5 de ces ampoules électriques, neuves. On suppose que les durées de vie D_1, ..., D_5 de ces ampoules sont des variables aléatoires indépendantes de même loi de densité f. On contrôle l'état des ampoules après 300 heures d'utilisation. Avec quelle probabilité deux (exactement) des ampoules sont hors d'usage ?

Démonstration. (i) Comme la fonction f est la densité de la v.a. D, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. D'où

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{]200,+\infty[}(x) \cdot \frac{c}{x^2}dx = c\int_{200}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = c\left[\frac{-1}{x}\right]_{200}^{+\infty} = \frac{c}{200}.$$

On a donc $c = 200$.

(ii) Cette proba. $= P(D < 300) = \int_{-\infty}^{300} f(x)dx = c\int_{200}^{300} x^{-2}dx = c[-x^{-1}]_{200}^{300} = 1/3$.

(iii) Les v.a. $D_1, \cdots, D_5$ sont indépendantes. Pour i, j deux entiers tels que $1 \leq i < j \leq 5$, notons

$A_{i,j}$ l'événement "les deux ampoules hors d'usage sont la $i^{\text{ième}}$ et la $j^{\text{ième}}$". On a

$$
\begin{aligned}
P(A_{i,j}) &= P\left(\left(\bigcap_{k\neq i,j}(D_k > 300)\right)\bigcap(D_i \leq 300)\bigcap(D_j \leq 300)\right) \\
&= \left(\prod_{k\neq i,j} P(D_k > 300)\right)\cdot P(D_i \leq 300)\cdot P(D_j \leq 300) \\
&= \left(1-\frac{1}{3}\right)^{5-2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{243}.
\end{aligned}
$$

Enfin, l'événement "deux (exactement) des 5 ampoules sont hors d'usage" est l'union disjointe suivante :

$$\bigcup_{1\leq i<j\leq 5} A_{i,j},$$

d'où la proba. voulue est

$$\sum_{1\leq i<j\leq 5} P(A_{i,j}) = \binom{5}{2} P(A_{1,2}) = 10\cdot\frac{8}{243} = \frac{80}{243}.$$

□

Exercice 7.3 La durée de vie , exprimée en semaines, d'un composant électronique est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle. La variable aléatoire X a donc une densité de probabilité de la forme : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$, et 0 sinon.

i) Déterminer la fonction de répartition de X.
ii) On a constaté expérimentalement que 95.12% de ces composants étaient encore en état de marche au bout de 25 semaines de fonctionnement. Montrer que cette constatation permet de fixer à 0.002 le paramètre λ.
iii) Quelle est la probabilité qu'un composant de ce type soit en état de marche au bout de 100 semaines de fonctionnement ?
iv) Sachant qu'un de ces composants a bien fonctionné pendant 100 semaines, quelle est la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de la 150 ème semaine ?

Démonstration. (i) D'après le cours, on sait sa fonction de répartition $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. On en déduit $F_X(x) = 0$ lorsque $x \leq 0$, et pour $x > 0$, on a

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{\lambda x}.$$

(ii) Par l'hypothèse, $P(X > 25) = 0,9512 = 1 - F_X(25) = e^{-25\lambda}$, on obtient donc $\lambda \approx 0,002$.
(iii) Il faut calculer $P(X > 100) = 1 - F_X(100) = e^{-100\lambda} = e^{-0,2} \approx 0,819$.
(iv) La proba. voulue $= P_{(X>100)}(X > 150) = e^{-150\lambda}/e^{-100\lambda} = e^{-50\lambda} = e^{-0,1} \approx 0,905$ (**Remarque :** ici, puisque $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, elle est sans mémoire d'après le cours, on en déduit donc $P_{(X>100)}(X > 150) = P(X > 150 - 100) = P(X > 50) = e^{-50\lambda}$). □

Exercice 7.4 La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, pour quelle valeur de x les événements $(X < x)$ et son contraire ont-ils même probabilité ? Que vaut-elle ?

Démonstration. Ceci dit, on demande x tel que $P(X < x) = P(X \geq x) = 1/2$. D'où $e^{-\lambda x} = 1/2$, donc $x = \ln(2)/\lambda$. □

Exercice 7.5 Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(8,4^2)$. Calculer

$$P(X<7,52),\ P(X>8,48),\ P(6<X<10),\ P_{(X>5)}(X>6)\,.$$

Démonstration. Comme $X \hookrightarrow \mathcal{N}(8,4^2)$, la v.a. $Y := \frac{X-8}{4}$ suit la loi normale centrée réduite (c-a-d : $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$). Alors pour $a \leq b$ deux réels, on a $P(a<X<b) = P\left(\frac{a-8}{4} < Y < \frac{b-8}{4}\right)$. Notons $\Phi(y) = P(Y \leq y)$ la fonction de répartition de Y. Donc

$$P(X<7,52) = P(Y<-0,12) = 1-P(Y<0,12) = 1-\Phi(0,12) \approx 1-0.5478 = 0.4522$$
$$P(X>8,48) = P(Y>0,12) = 1-P(Y<0,12) = 1-\Phi(0,12) \approx 0.4522$$
$$P(6<X<10) = P(-0,5<Y<0,5) = P(Y<0,5)-(1-P(Y\leq 0,5)) = 2\Phi(0,5)-1 \approx 0.383.$$

Enfin, $P(X>5) = P(Y>-0,75) = P(Y<0,75) = \Phi(0,75)$, et $P(X>6) = P(Y>-0,5) = \Phi(0,5)$, d'où

$$P_{(X>5)}(X>6) = \frac{\Phi(0,5)}{\Phi(0,75)}\frac{0.6915}{0.7734} \approx 0.894$$

□

Exercice 7.6

i) Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(4,4)$, déterminer $P(Y\leq 6)$.

ii) Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(3,(1,5)^2)$, déterminer x pour que $P(Y\leq x) = 0,4218$.

iii) Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(5,4)$, déterminer $P(2,5\leq Y\leq 6,5)$.

iv) Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(6,4)$, déterminer un intervalle, centré sur la moyenne dans lequel est Y prend ses valeurs avec la probabilité $0,9$.

Démonstration. Même méthode que celle de l'exercice précédent. □

Exercice 7.7

i) Soient X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite et x un réel positif. Exprimer en fonction de $\alpha = P(|X|>x)$ les probabilités $P(X>x)$ et $P(X<-x)$.

ii) Lors d'un tir, on admet que les longueurs de tir suivent une même loi normale. On constate en ayant effectué un grand nombre de tirs que 10% des obus tombent à une distance supérieure à 1,6 km et 25% à une distance inférieure à 1,4 km. Donner une valeur approchée de la moyenne et de l'écart-type de la loi normale suivie par les longueurs de tir.

Démonstration. (i) Comme X suit la loi centrée réduite, on a $P(X<a) = P(X>-a) = 1-P(X<-a)$ quelque soit $a\in\mathbf{R}$. On en déduit que, si $x\geq 0$

$$P(|X|>x) = P\left((X>x)\bigcup(X<-x)\right) = P(X>x)+P(X<-x) = 2P(X>x) = 2P(X<-x).$$

(ii) Notons Y la v.a. égale à la longueur, exprimée en kilomètre, d'un tir. Supposons $\mu = E(Y)$, et $V(Y) = \sigma^2$. On a alors $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Les hypothèses entraînent que $P(Y>1,6) = 0,1$ et $P(Y<1.4) = 0,25$.

La v.a. $Z := \frac{Y-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour $\alpha\in]0,1[$, notons $x_\alpha \in \mathbf{R}\geq 0$ l'unique nombre réel tel que $P(|Z|>x_\alpha) = \alpha$. D'après (1), on a $\alpha = 2P(Z>x_\alpha)$, autrement dit, $P(Z>x_\alpha) = \alpha/2$. On obtient donc les deux equations suivantes :

$$\frac{\mu-1.4}{\sigma} = x_{0.5} \approx 0.674$$

et

$$\frac{1.6-\mu}{\sigma} = x_{0.2} \approx 1.282.$$

D'où $\mu\approx 1.47$, et $\sigma\approx 0.1$. □

Exercice 7.8 Une usine fabrique des billes de diamètre nominal 8 mm. Les erreurs d'usinage provoquent une variation du diamètre qui est une variable aléatoire E suivant une loi normale de moyenne 0 mm et d'écart-type $0,015$ mm. Lors du contrôle de fabrication on écarte les billes qui passent à travers une bague de diamètre $7,98$ mm, ainsi que celles qui ne passent pas à travers une bague de diamètre $8,02$ mm.

i) Quelle est la probabilité qu'une bille prise au hasard soit écartée ?

ii) Lorsque la bille est trop petite elle est rejetée, lorsqu'elle est trop grande elle est retaillée convenablement (elle ne sera pas écartée après avoir été retaillée). Le coût de fabrication d'une bille est de 1 euro et le surcoût pour retailler une bille est de 30 centimes d'euros.
Soit C la variable aléatoire coût de fabrication d'une bille, déterminer la loi de C.

iii) Soit B la variable aléatoire bénéfice réalisé pour une bille prise au hasard (parmi toutes les billes produites). Déterminer la loi de B pour un prix de vente d'une bille de x euros (on remarquera que B ne peut prendre que les trois valeurs : -1 ; $x-1,3$; $x-1$).

iv) Déterminer le prix de vente minimal pour que l'entreprise soit bénéficiaire.

Démonstration. (i) Notons X la v.a. égale au diamètre nominal d'une billet prise au harsard, alors $X = E+8 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu = 8$, et $\sigma^2 = 0,015^2 = 0,000225$. En plus, une billet prise au harsard est écartée si et seulement si $7,98 \leq X \leq 8.02$. Donc la proba. voulue est

$$P(7,98 \leq X \leq 8,02) = P\left(-\frac{0,02}{0,015} \leq \frac{X-8}{0,015} \leq \frac{0,02}{0,015}\right) = 2P\left(\frac{X-8}{0,015} \leq 1,33\right) - 1 \approx 0.8164$$

(ii) Les valeurs possibles de C sont $\{1, 1.3\}$, et $C = 1,3$ ssi la billet est trop grande : $X > 8.02$. Donc $P(C = 1.3) = P(X > 8.02) = P\left(\frac{X-8}{0,015} > \frac{0,02}{0,015}\right) \approx 1 - 0.9082 = 0.0918$

(iii) Les valeurs possibles de B sont $\{-1, x-1.3, x-1\}$, et on sait $(B = -1) = (X < 7.98)$, $(B = x-1,3) = (X > 8,02)$. Donc

$$P(B = -1) = P(X < 7,98) = P\left(\frac{X-8}{0,015} < -\frac{0,02}{0,015}\right) \approx 0.0918$$

$$P(B = x-1,3) = P(X > 8,02) = P\left(\frac{X-8}{0,015} > \frac{0,02}{0.015}\right) \approx 0.0918$$

Enfin, on a $P(B = x-1) = 1 - P(B = -1) - P(B = x-1) \approx 0.8164$

(iv) Pour que l'entreprise soit bénéficiaire, il faut et il suffit que $E(B) > 0$. Or

$$E(B) = -1 \cdot P(B = -1) + (x-1)P(B = x-1) + (x-1,3)P(B = x-1,3).$$

Donc, il faut $x > 1.13$. $\square$

Exercice 7.9 On désigne par $X_1, \ X_2, \ \cdots, \ X_n$ les rendements en quintaux par hectare de n parcelles ensemencées avec une même variété de céréale. On suppose que ces variables sont indépendantes et suivent toutes la même loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Soit la variable aléatoire moyenne $M = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

i) Déterminer l'espérance et la variance de M.

ii) Quelle est la loi de M ?

iii) On suppose que $\sigma = 2,5$, combien de parcelles faut-il observer pour que $P(\mu - 1 \leq M \leq \mu + 1) > 0,99$?

Démonstration. (i) $E(M) = \frac{1}{n}(EX_1 + \cdots + E(X_n)) = \mu$. Comme les v.a. X_i sont indépendantes, on en déduit que

$$V(M) = \frac{1}{n^2}(V(X_1) + \cdots + V(X_n)) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

(ii) Comme les v.a. sont indépendantes, on sait que la somme $X_1 + \cdots + X_n$ suit encore une loi normale. Donc $M = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ l'est aussi. Compte tenu de (i), on a donc $M \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

(iii) Puisque

$$P(\mu - 1 \leq M \leq \mu + 1) = P(-\frac{1}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{M-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}) = P\left(\left|\frac{M-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

Donc, pour $P(\mu - 1 \leq M \leq \mu + 1) > 0,99$, il faut et il suffit que $P\left(\left|\frac{M-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) < 0,01$. D'où $\frac{1}{\sigma/\sqrt{n}} > 2,576$, donc $n > (2.576\sigma)^2 \approx 41.57$. □

Exercice 7.10 Pour un certain type de graines, la probabilité de germination est $p = 0,8$. Une personne sème 400 graines. Donner une estimation de la probabilité que 300 au moins germent.

Démonstration. Notons X_i la v.a. égale à 1 si le i^{ieme} grain germe, et à 0 sinon. Notons $N = X_1 + X_2 + \cdots + X_{400}$. Alors la proba. voulue est $P(N \geq 300)$. Or $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(0,8)$, et les v.a. $X_1, \cdots X_{400}$ sont indépendantes, d'après le théorème de limite centrale, la variable

$$\frac{N - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{N - 320}{\sqrt{64}} = \frac{N - 320}{8}$$

suit, à peu près, la loi normale centrée réduite. Donc, la proba. voulue est

$$P(N \geq 300) = P\left(\frac{N-320}{8} \geq \frac{300-320}{8} = -2.5\right) \approx 0.9938$$

□

Exercice 7.11 Dans une population homogène de 20000 habitants, la probabilité pour qu'une personne quelconque demande à être vaccinée contre la grippe est de $0,4$. Donner une estimation du nombre de vaccins dont on doit disposer pour que la probabilité qu'on vienne à en manquer soit inférieur à $0,1$?

Démonstration. Notons X_i la v.a. égale à 1 si le i^{ieme} habitant demande à être vacciné contre la grippe, alors X_i suit la loi de Bernouilli de paramètre $0,4$. Le nombre N de vaccins est donc égale à $X_1 + X_2 + \cdots + X_{20000}$. Comme les X_i sont indépendantes, d'après le théorème de limite centrale, la v.a.

$$\frac{N - 20000 \cdot 0,4}{\sqrt{20000 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = \frac{N - 8000}{\sqrt{4800}}$$

suit, à peu près, la loi normale centrée réduite. On aimerait trouver ici le plus petit entier N_0 tel que $P(N > N_0) < 0.1$. Cherchons d'abord $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $P(N > x_0) = 0.1$. Or

$$P(N > x_0) = P\left(\frac{N-8000}{\sqrt{4800}} > \frac{x_0 - 8000}{\sqrt{4800}}\right) = 0.1,$$

on trouve $\frac{x_0-8000}{\sqrt{4800}} > 0$, et

$$P\left(\left|\frac{N-8000}{\sqrt{4800}}\right| > \frac{x_0-8000}{\sqrt{4800}}\right) = 2P\left(\frac{N-8000}{\sqrt{4800}} > \frac{x_0-8000}{\sqrt{4800}}\right) = 0.2.$$

D'où $\frac{x_0-8000}{\sqrt{4800}} = 1.282$, donc $x_0 = 8088,81$. Donc $N_0 = 8088$. □